

关于一类曲线收缩流的保积性和能量衰减性的研究*

冯兆永¹, 徐士河²

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2. 肇庆学院数学与信息科学学院, 广东 肇庆 526061)

摘要: 对一类带接触角的曲线收缩流的性质进行了研究。利用 Garcke 和 Novick-Cohen 的能量定义, 证明了其具有保积性和能量衰减性。稳态解在能量达到最小值时取得。

关键词: 曲线收缩流; 三重接点; Young's law

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 06-0007-03

On the Area-Preserving and Energy-Decaying Properties for a Class of Curve Shortening Flows

FENG Zhaoyong¹, XU Shihe²

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Mathematics, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China)

Abstract: The properties of a class of curve shortening flows with contact angle is studied. With the energy defined by Garcke and Novick-Cohen, it is proved that they have the area-preserving and energy-decaying properties. The stationary solution is achieved at the minimal energy.

Key words: curve shortening flow; triple junction; Young's law

所讨论的曲线收缩流来源于一个非平衡态的三元合金扩散模型中所出现的自由边界问题^[1-5]。在这一扩散模型中, 假设该三元合金位于 $\mathbb{R}^2$ 的有界区域 Ω 中, 而且它们的三个相是由三个移动界面曲线 $\Gamma_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) 来分隔的, 其中时间变元 $t \geq 0$ 。这三个界面分别与区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 垂直于一端点 $b_i(t)$, 另一端点相交于一个三重接点 $m(t) \in \Omega$, 而且界面所满足的发展方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{for } t > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{along } \Gamma_i(t): V_i = \sigma_i(\kappa_i - \bar{\kappa}_i), \\ \text{at } b_i(t): \Gamma_i(t) \perp \partial\Omega, \\ \text{at } m(t): \angle(\Gamma_i(t), \Gamma_j(t)) = \theta_k, \\ \text{for } i, j, k \in \{1, 2, 3\} \\ \text{mutually different,} \\ \sigma_1\kappa_1 + \sigma_2\kappa_2 + \sigma_3\kappa_3 = 0, \end{array} \right. \\ \text{at } t = 0: \Gamma_i(0) = \Gamma_{i,0}, m(0) = m_0 \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 V_i, κ_i 分别表示界面曲线 $\Gamma_i(t)$ 的法向速率和曲率; 平均曲率 $\bar{\kappa}_i = \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \kappa_i ds$; $|\Gamma_i|$ 表示曲线 $\Gamma_i(t)$ 的长度, s 表示曲线 $\Gamma_i(t)$ 从三重接点 $m(t)$ 到端点 $b_i(t)$ 的弧长参数。若设 $T_i(t)$ 为曲线 $\Gamma_i(t)$ 关于 s 的单位切向量, 则我们将选择一单位法向量 $N_i(t)$ 使得 $(T_i(t), N_i(t))$ 构成一个正定向的 Frenet 标架。这时, V_i 和 κ_i 的数量由 $N_i(t)$ 所确定。此外, $\Gamma_{i,0}, m_0$ 是给定的初始条件; σ_i, θ_i 是正常数且满足以下的约束条件: $0 < \theta_i < \pi, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$,

和 Young's law: $\frac{\sigma_1}{\sin \theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sin \theta_2} = \frac{\sigma_3}{\sin \theta_3}$ (2)

1 概述

近来, Escher 和 Feng 首先在文献 [6] 中研究了在一个特别的几何对称结构下方程组 (1) 的稳

* 收稿日期: 2008-12-30

基金项目: 中山大学青年教师科研启动基金资助项目 (3171914)

作者简介: 冯兆永 (1977 年生), 男, 讲师; 通讯作者: 徐士河; E-mail: shihexu03@yahoo.com.cn

态解的渐近性态 (见图 1); 接着在文献 [7] 中研究了 Ito 等^[8] 所提出的对称结构下方程组 (1) 的解的局部适定性 (见图 2)。为了研究方程组 (1) 的解的全局适定性, 我们需要对方程组 (1) 进行一些估计, 特别是能量估计。本文正是以此为动机的。

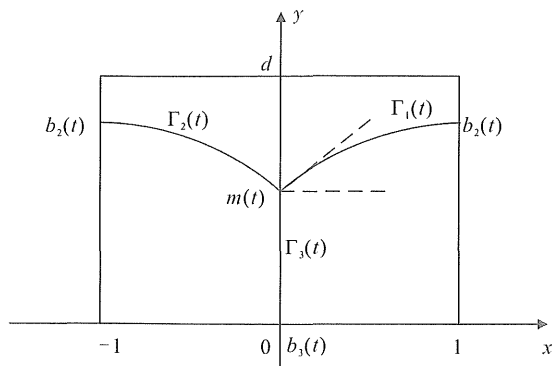


图 1 y 轴对称

Fig. 1 Symmetry by y axis

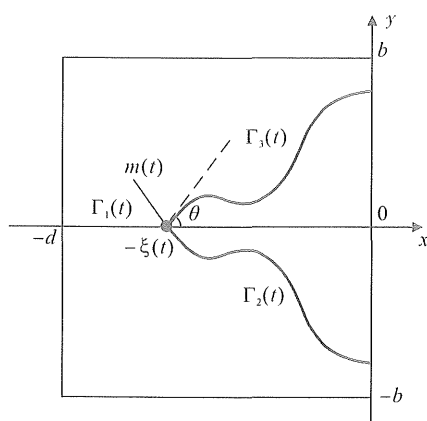


图 2 x 轴对称

Fig. 2 Symmetry by x axis

2 主要结论及其证明

为了方便起见, 用 $\Gamma(t)$, Γ_0 分别表示所有的界面曲线和与之对应初始值, 即

$$\Gamma(t) = \{\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)\},$$

$$\Gamma_0 = \{\Gamma_{1,0}, \Gamma_{2,0}, \Gamma_{3,0}\}$$

$C^{1,2}$ 表示一类关于时间变元 t 一次连续可导, 而且关于空间变元二次连续可导的函数^[9]。

若 $\Gamma_1(t) \in C^{1,2}$, $\Gamma_2(t) \in C^{1,2}$, $\Gamma_3(t) \in C^{1,2}$, 则记 $\Gamma(t) \in C^{1,2}$ 。对 $\Gamma_0 \in C^2$ 也是类似的。此外, 也用 $L[\Gamma_i(t)] := L_i(t)$ 来表示曲线 $\Gamma_i(t)$ 的长度。设 i, j, k 为集合 $\{1, 2, 3\}$ 中互不相同的元素,

我们用 $\Omega_i(t)$ 来表示由曲线 $\Gamma_j(t)$, $\Gamma_k(t)$ 和边界 $\partial\Omega$ 所围成的区域, 且 $|\Omega_i(t)|$ 表示区域 $\Omega_i(t)$ 的面积。为了简单起见, 总假设曲线 $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ 和 $\Gamma_3(t)$ 是按逆时针分布的。本文所考虑的能量 $E = E[\Gamma(t)]$ (见文献 [5]) 被定义为如下形式:

$$E[\Gamma(t)] := \sum_{i=1}^3 \sigma_i L[\Gamma_i(t)]$$

定理 1 设 $\Gamma_0 \in C^2$ 且满足适当的兼容性条件。若 $\Gamma(t)$ 是方程组 (1) 以 Γ_0 为初值的 $C^{1,2}$ 解, 那么对于所有的 $t \geq 0$, 都有

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 \int_0^{L_i(t)} (\kappa_i - \bar{\kappa}_i)^2 ds \quad (3)$$

$$|\Omega_i(t)| = |\Omega_i(0)|, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

成立。

证明 由演化曲线的输运定理知,

$$\frac{d}{dt} L_i(t) = - \int_{\Gamma_i(t)} \kappa_i V_i ds - \int_{\partial\Gamma_i(t)} \nu_i \cdot \dot{R}_i \quad (5)$$

其中 ν_i 表示曲线 $\Gamma_i(t)$ 在端点处指向接触面的单位切向量; $\dot{R}_i$ 表示曲线 $\Gamma_i(t)$ 的端点的移动速度。在曲线 $\Gamma_i(t)$ 端点 $b_i(t)$ 上, 由曲线 $\Gamma_i(t)$ 与边界 $\partial\Omega$ 所满足的角条件知, $\nu_i \cdot \dot{R}_i = 0$ 。因此, (5) 右端的边界积分只需考虑在三重接点 $m(t)$ 上的情况。这时 $\dot{R}(t) = m'(t)$, 即

$$\int_{\partial\Gamma_i(t)} \nu_i \cdot \dot{R}_i = \nu_i \cdot m'(t)$$

则由能量 E 的定义得知,

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{i=1}^3 \sigma_i \int_{\Gamma_i(t)} \kappa_i V_i ds - \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \nu_i \right) \cdot m'(t)$$

由于在三重接点 $m(t)$ 处所满足的 Young's law 可以表述为机械力的一种平衡^[10], 即

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i \nu_i = 0$$

因此, 利用方程组 (1) 中的扩散方程和 $\int_{\Gamma_i(t)} (\kappa_i - \bar{\kappa}_i) ds = 0$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \sum_{i=1}^3 \sigma_i \int_{\Gamma_i(t)} \kappa_i V_i ds = - \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 \int_{\Gamma_i(t)} \kappa_i (\kappa_i - \bar{\kappa}_i) ds = \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 \int_0^{L_i(t)} (\kappa_i - \bar{\kappa}_i)^2 ds \end{aligned}$$

这就证明了 (3)。对于区域 $\Omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ 的面积的研究, 由于相似性, 我们只需考虑 $i = 1$ 的情形, 即区域 $\Omega_1(t)$ 。记 $V_{\partial\Omega_1(t)}$ 为边界 $\partial\Omega_1(t)$ 的外法向速率, 则

$$\frac{d|\Omega_1(t)|}{dt} = \int_{\partial\Omega_1(t)} V_{\partial\Omega_1(t)} ds$$

(参见文献 [10]), 其中积分方向是按逆时针方向

的。注意到 $\partial \Omega_1(t) = \Gamma_3(t) \cup$ 部分 $\partial \Omega \cup \Gamma_2(t)$ 。从而有

$$V_{\partial \Omega_1(t)} = \begin{cases} -V_2, & s \in \Gamma_2(t); \\ 0, & s \in \partial \Omega; \\ V_3, & s \in \Gamma_3(t) \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d|\Omega_1(t)|}{dt} &= \int_0^{L_2(t)} (-V_2) ds + \int_{L_3(t)}^0 V_3 ds = \\ &= -\int_0^{L_2(t)} V_2 ds - \int_0^{L_3(t)} V_3 ds = \\ &= -\sigma_2 \left(\int_0^{L_2(t)} \kappa_2 ds - L_2(t) \bar{\kappa}_2 \right) - \\ &= \sigma_3 \left(\int_0^{L_3(t)} \kappa_3 ds - L_3(t) \bar{\kappa}_3 \right) = 0 \end{aligned}$$

从而 $|\Omega_1(t)| = |\Omega_1(0)|$, 这就证明了 (4)。

注: 定理 1 暗示了方程组 (1) 所描述的扩散具有保积性与能量衰减性。此外 (3) 不但得到 $\frac{dE}{dt} \leq 0$

的事实, 而且说明了 $\frac{dE}{dt} = 0$ 成立当且仅当各条界面曲线 $\Gamma_i(t)$ 具有常曲率, 即它们要么是线段, 要么是圆弧。这时, 方程组 (1) 所对应的解正是该问题的稳态解。

参考文献:

- [1] ELLIOTT C M, GARCKE H. Existence results for diffusive surface motion laws [J]. *Advances in Mathematical Sciences and Application*, 1977, 7: 467 - 490.
- [2] CHEN X. The Hele-Shaw problem and area-preserving curve-shortening motions [J]. *Arc Rat Mech Anal*, 1993, 123: 117 - 151.
- [3] STERNBERG P, ZIEMER W P. Local minimisers of a three-phase partition problem with triple junctions [J]. *Proc R Soc Edinburgh*, 1994, 124A: 1059 - 1073.
- [4] ESCHER J, MAYER U F, SIMONETT G. The surface diffusion flow for immersed hypersurfaces [J]. *SIAM J Math Anal*, 1998, 29: 1419 - 1433.
- [5] GARCKE H, NOVICK-COHEN A. A singular limit for a system of degenerate Cahn-Hilliard equations [J]. *Adv Differential Equations*, 2000, 5(4-6): 401 - 434.
- [6] ESCHER J, FENG Z Y. Exponential stability of equilibria of the curve shortening flow with contact angle [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 2007, 14(2): 287 - 299.
- [7] ESCHER J, FENG Z Y. On the curve shortening flow with triple junction [J]. *Functional Analysis and Evolution Equations, The Günter Lumer Volume*, 2007: 223 - 238.
- [8] ITO K, KOHSAKA Y. Three-phase boundary motion by surface diffusion: stability of a mirror symmetric stationary solutions [J]. *Interfaces & Free Boundaries*, 2001, 3(1): 45 - 80.
- [9] LUNARDI A. Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems [M]. *Birkhäuser*, 1995.
- [10] GURTIN M E. Thermodynamics of evolving phase boundaries in the plane [M]. *Oxford: Clarendon Press*, 1993.

· 简 讯 ·

更 正

本刊 2009 年第 5 期第 82 页中, “毛细管电泳—电化学发光联用测定琥乙红霉素”一文的作者单位更正为: 谭贵良和江迎鸿的单位为广东省中山市质量计量监督检测所; 李向丽为中山火炬职业技术学院生物医药系。

英文单位相应为:

TAN Guiliang, JIANG Yinghong 单位为 Zhongshan Supervision Testing Institute of Quality & Metrology;
LI Xiangli 单位为 Department of Biomedicine, Zhongshan Torch Technology Collge

特此更正。